

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



**ANÁLISIS DE UN ABSORSOR DE VIBRACIONES MEDIANTE UN
MODELO DISCRETO IMPLEMENTADO A UNA VIGA EN VOLADIZO**

**Trabajo de investigación para obtener el grado académico de BACHILLER
EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN INGENIERÍA MECÁNICA**

AUTOR:

Carlos Gianpaul Rincón Ruiz

ASESOR:

Dr. Ing. Jorge Hernán Alencastre Miranda

Lima, Diciembre, 2020

Resumen

Extendiendo la teoría existente acerca de los absorbentes dinámicos de vibración o también conocidos como masas sintonizadas, un modelo discreto de múltiples grados de libertad de una viga en voladizo implementado con él es propuesto a fin de cuantificar la reducción de la amplitud de sus vibraciones en diferentes casos de estudio.

En la mayoría de casos dentro del campo de la Ingeniería, los sistemas reales son modelados como sistemas discretos de un número finito de grados de libertad, pues las ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan su movimiento, resultan más fáciles de analizar. En este sentido, se propone un modelo conceptual discreto de la viga en voladizo y se determina su amplitud de vibración en los casos con y sin absorbente. En la simulación mediante el software MATLAB, se encuentra que el rango de frecuencias de excitación en el que el absorbente es efectivo se amplifica conforme la magnitud de su masa es mayor.

Los resultados manifiestan que la implementación del absorbente resulta una excelente alternativa para atenuar vibraciones no deseadas de un sistema, logrando reducirlas hasta el orden menor al 1% de la amplitud original en el caso estudiado.



A mis padres,
quienes con su esfuerzo y sacrificio,
me han permitido concluir esta primera etapa

Tabla de contenido

Resumen	2
1. Introducción	11
1.1. Antecedentes	11
1.2. Declaración del problema.....	12
1.3. Declaración de la propuesta	13
1.4. Estructura del estudio	14
2. Modelamiento discreto del sistema viga en voladizo	15
2.1. Ecuaciones de movimiento	16
2.2. Simulación numérica: validación del modelo discreto viga en voladizo	23
3. Vibración forzada del sistema viga en voladizo	26
3.1. Ecuaciones de movimiento en coordenadas modales	26
3.2. Simulación numérica y discusión de resultados.....	30
4. El absorsor dinámico de vibraciones	37
5. Modelamiento del sistema viga en voladizo-absorsor de vibraciones.....	39
5.1. Ecuaciones de movimiento	40
5.2. Simulación numérica y discusión de resultados.....	44
5.2.1. Amplitudes de vibración del sistema implementado con el absorsor de vibraciones	44
5.2.2. Influencia de la masa del absorsor en la reducción de la amplitud de vibración del sistema.....	49
6. Conclusiones	53
Bibliografía.....	55
Anexo A: Algoritmo para el cálculo de las frecuencias naturales del modelo discreto.....	56
Anexo B: Algoritmo para el cálculo de la contribución de cada modo y amplitudes de vibración.....	57
Anexo C: Algoritmo para el cálculo de amplitudes de vibración con el absorsor de vibraciones implementado	58
Anexo D: Algoritmo para el cálculo de las amplitudes de vibración con el absorsor implementado para diferentes magnitudes de su masa	59

Índice de Figuras

Figura 1. Estructura del trabajo de investigación.....	14
Figura 2. Esquema de viga empotrada bajo una fuerza de excitación armónica.	15
Figura 3. Primer modelo discreto de la viga.....	16
Figura 4. Segundo modelo discreto de la viga.....	16
Figura 5. Modelo discreto de la viga para n DOF.....	17
Figura 6: Superposición de fuerzas del sistema viga en voladizo	19
Figura 7. Momento flector de la sección x a lo largo de la viga para el i -ésimo sistema	20
Figura 8. Amplitudes de cada sistema modal de 1 DOF.....	33
Figura 9. Amplitud de vibración de cada masa del sistema viga en voladizo según la frecuencia de excitación	36
Figura 10. Sistema viga en voladizo-absorsor de vibraciones.....	39
Figura 11. (a) DCL de la masa del absorsor (b) DCL de la masa 4(extremo libre de la viga)	40
Figura 12. Amplitud de vibración de cada masa del sistema implementado con el absorsor de vibraciones sintonizado a la 1ra frecuencia natural con una masa del absorsor de 0,05kg	47
Figura 13. Amplitud de vibración de cada masa del sistema implementado con el absorsor de vibraciones sintonizado a la 2da frecuencia natural con una masa del absorsor de 0,05kg	48
Figura 14. Amplitud del extremo de la viga implementado con el absorsor de vibraciones sintonizado a la 1ra frecuencia natural para distintas magnitudes de masa del absorsor	51
Figura 15. Amplitud del extremo de la viga implementado con el absorsor de vibraciones sintonizado a la 2da frecuencia natural para distintas magnitudes de masa del absorsor.....	52

Índice de Tablas

Tabla 1	Parámetros de la viga utilizados en la simulación	23
Tabla 2	Frecuencias naturales de la viga en voladizo según los DOF utilizados	24
Tabla 3	Error porcentual de las frecuencias naturales halladas con el modelo discreto propuesto respecto del sistema continuo	25
Tabla 4	Parámetros del modelo discreto para el caso de vibración forzada	30
Tabla 5	Contribución de cada modo al movimiento total del sistema para 3 frecuencias de excitación	34
Tabla 6	Parámetros del absorsor según la frecuencia de excitación en la que se desea atenuar las vibraciones	45
Tabla 7	Rigidez del absorsor según la frecuencia natural y masa del absorsor	49



Lista de Símbolos

\ddot{q}_n	Aceleración modal correspondiente a un número de modo de vibración	$\left[\frac{m}{s^2} \right]$
V_n	Amplitud de cada coordenada modal	$[m]$
b	Ancho de la sección transversal de la viga en voladizo	$[m]$
A	Área de la sección transversal de la viga en voladizo	$[m^2]$
$q_n(t)$	Coordenada modal correspondiente al número de modo	$[m]$
ρ	Densidad volumétrica del acero	$\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
X_i	Desplazamiento vertical de la i-ésima masa	$[m]$
w	Energía de deformación del sistema	$[J]$
e	Espesor de la sección transversal de la viga en voladizo	$[m]$
ω	Frecuencia de excitación	$\left[\frac{rad}{s} \right]$
ω_n	Frecuencia natural correspondiente al número de modo	$\left[\frac{rad}{s} \right]$
$f(t)$	Fuerza externa variante en el tiempo	$[N]$
F_i	Fuerza sujeta a la i-ésima masa	$[N]$

l_i	Longitud desde el empotramiento hasta la i-esima masa	$[m]$
x	Longitud desde el empotramiento hasta una sección cualquiera	$[m]$
L	Longitud total de la viga	$[m]$
m_i	Masa de la i-esima partición de la viga	$[kg]$
m_v	Masa de la viga en voladizo	$[kg]$
m_a	Masa del absorsor de vibraciones	$[kg]$
m_n	Masa en cada sistema modal	$[kg]$
\ddot{X}	Matriz de aceleraciones de masas del sistema	$\left[\frac{m}{s^2} \right]$
\ddot{q}	Matriz de aceleraciones de modales del sistema	$\left[\frac{m}{s^2} \right]$
\ddot{X}'	Matriz de aceleraciones del sistema implementado con el absorsor	$\left[\frac{m}{s^2} \right]$
V	Matriz de amplitudes de las coordenadas modales	$[m]$
V'	Matriz de amplitudes del sistema implementado con el absorsor	$[m]$
$q(t)$	Matriz de coordenadas modales	$[m]$

H	Matriz de flexibilidad del sistema	$\left[\frac{m}{N} \right]$
U	Matriz de forma de los modos de vibración de la viga en voladizo	$[-]$
F	Matriz de fuerzas de excitación	$[N]$
F'	Matriz de fuerzas del sistema implementado con el absorsor	$[N]$
Q	Matriz de fuerzas modales del sistema	$[N]$
M	Matriz de masa del sistema	$[kg]$
\bar{M}	Matriz de masa modal del sistema	$[m]$
M'	Matriz de masas implementada con el absorsor de vibraciones	$[kg]$
X'	Matriz de posición del sistema implementado con el absorsor	$[m]$
X	Matriz de posiciones de masa del sistema	$[m]$
K	Matriz de rigidez del sistema	$\left[\frac{N}{m} \right]$
K'	Matriz de rigidez implementada con el absorsor de vibraciones	$\left[\frac{N}{m} \right]$

\bar{K}	Matriz de rigidez modal del sistema	$\left[\frac{N}{m} \right]$
λ	Matriz de valores propios correspondientes al vector propio U	$\left[\frac{kg}{s^2} \right]$
U^T	Matriz transpuesta de U	$[-]$
E	Módulo de elasticidad del material de la viga	$\left[\frac{N}{m^2} \right]$
I	Momento de inercia de la sección transversal de la viga	$\left[m^4 \right]$
M_i	Momento flector producido por F_i a una distancia x del empotramiento	$[N.m]$
n	Número de particiones de la viga	$[-]$
k_a	Rigidez del absorsor de vibraciones	$\left[\frac{N}{m} \right]$
k_{afn}	Rigidez del absorsor sintonizado a la frecuencia natural correspondiente al índice n	$\left[\frac{N}{m} \right]$
k_n	Rigidez en cada sistema modal	$\left[\frac{N}{m} \right]$
λ_n	Valor propio correspondiente a la coordenada modal	$\left[\frac{kg}{s^2} \right]$

1. Introducción

1.1. Antecedentes

La historia de las vibraciones mecánicas y su estudio se remonta a miles de años, no siempre en el campo de la Ingeniería. Nuestro interés hacia su estudio nace con la música, las llamadas notas musicales que en esencia son ondas de frecuencias ya establecidas que logran una armonía. A primera impresión, podría resultar ámbitos muy distintos, pero comparten el mismo cuerpo de estudio en las ecuaciones que gobiernan sus comportamientos, ecuaciones que dan forma hoy a este trabajo.

En el campo de la Ingeniería, las vibraciones mecánicas de máquinas, estructuras, instrumentos, tuberías y otros sistemas llamados primarios resultan indeseadas en la mayoría de casos, pues pueden producir cargas dinámicas dentro del sistema que no han sido contempladas en la etapa de diseño y alteran su buen funcionamiento que en un caso crítico produce el fallo de algún componente. Tal es el caso de instrumentos en los que se busca precisión en la medida, por lo que se busca no montarlos sobre un sistema vibrante; o una estructura que sirve de soporte para el funcionamiento de una máquina, existen fuerzas de excitación provenientes de ella que las absorbe la estructura y de alcanzar la frecuencia de excitación alguna de las frecuencias naturales de la estructura, produciría grandes deformaciones que terminarían en el fallo de este; o en el caso de una tubería que transporta un fluido en una Refinería, que constantemente busca formas de incrementar su carga según el requerimiento de la industria. Inicialmente es diseñada para atender un requerimiento como determinado caudal, presión, tipo de fluido y velocidad del fluido. Un cambio en la carga de proceso en la refinería implica un comportamiento distinto al predeterminado por el diseño. Este es el campo de la vibración inducida por el flujo estudiada en literatura como Sauvé, Tabatabai, Morandin, & Kozluk (1998). El flujo transportado excita las

tuberías a una frecuencia determinada y debe asegurarse que esta no alcance alguna de las frecuencias naturales de la tubería, pues la deformación producto de la resonancia busca ser absorbida por las conexiones, lo que termina en fugas de las líneas.

En el desarrollo de la Ingeniería, se ha buscado métodos para evitar las vibraciones mecánicas o en su defecto, reducirlas. Para este fin, existen diversos mecanismos que buscan reducir las amplitudes de vibración como los amortiguadores de fluido visco elástico, bases de aislamiento, amortiguador de masa sintonizada (TMD) (Gonzalez-Buelga et al., 2015).

En este sentido, la masa sintonizada o también conocido como absorber dinámico de vibraciones inventado por Frahm en 1909 es, en esencia, un accesorio acoplado a un sistema primario que absorbe la energía transmitida por la fuerza de excitación en lugar de que lo haga el sistema primario; entonces el absorber es la masa que vibra mientras que el sistema primario es el que permanece quieto. En su análisis, es un sistema mecánico secundario que consta de una masa y rigidez. Ambos parámetros están sintonizados para atenuar la vibración de un sistema primario en una determinada frecuencia de excitación, llamada frecuencia de absorción; además no requieren de una fuente externa de energía para su funcionamiento.

1.2. Declaración del problema

La importancia de esta alternativa radica en que existen casos en los que la fuerza de excitación que provocan las vibraciones no deseadas no pueden eliminarse o cambiar la masa o rigidez del sistema para modificar la frecuencia natural y alejarla de la frecuencia de excitación resulta improbable debido a una situación específica; en estos casos, una tercera posibilidad es acoplar una masa sintonizada a la frecuencia de excitación mejor conocida como el absorber dinámico de vibraciones (Den Hartog, 1956). Se ha estudiado ampliamente el absorber dinámico de vibraciones

en su caso más simple representado por un sistema de dos grados de libertad en literatura presenta por los autores Den Hartog (1956), Rao (1952), Warburton & Ayorinde (1980). Estos autores brindan lineamientos acerca de los parámetros del absorber para un sistema de 2DOF.

Se evidencia la falta de un estudio acerca de la respuesta de sistemas reales en los que se implementa un absorber dinámico de vibraciones, no solo en sistemas de 2DOF, estudio que es necesario en la Ingeniería Básica del diseño de un absorber de vibraciones para cuantificar la reducción de la amplitud de vibración en sistemas reales en el campo de la Ingeniería.

1.3. Declaración de la propuesta

El sistema elegido para el estudio de los parámetros del absorber dinámico de vibraciones es una viga en voladizo, pues las ecuaciones que lo representan pueden utilizarse también en sistemas de mayor complejidad no solo en el ámbito estructural, también en otros como *piping*.

Se propone y resuelve un modelo discreto de múltiples grados de libertad que representa un sistema real de una viga en voladizo excitado en sus dos primeras frecuencias naturales. Se implementa un absorber dinámico de vibraciones al modelo y los efectos de sus parámetros e influencia de ellos la reducción de las amplitudes de vibración son calculados y discutidos.

La contribución teórica de esta investigación radica en que el procedimiento propuesto no solo se limita al análisis del sistema elegido. Los sistemas reales suelen aproximarse mediante modelos continuos o discretos, las características dinámicas del sistema que se utilizan en la ecuación diferencial que lo representa pueden obtenerse por medio de ensayos como el *Experimental Modal Analysis* o el *Operational Modal Analysis* y utilizar el modelo obtenido para determinar los parámetros de un absorber mecánico en caso sea conveniente.

En este sentido, el análisis presentado para la implementación del absorber dinámico de vibraciones y determinación de sus parámetros puede ser extendido hacia modelos de múltiples grados de libertad que representen diferentes sistemas reales de una mayor complejidad.

1.4. Estructura del estudio

En orden de obtener un panorama del desarrollo del trabajo de investigación, se elaboró un diagrama de flujo con las etapas seguidas, Figura 1. En primer lugar, se establece la geometría del sistema real de la viga en voladizo excitado por una fuerza armónica necesaria. Luego se proponen los modelos discretos y se discuten los resultados a fin de comparar si las frecuencias naturales calculadas con el modelo discreto se aproximan con un margen de error aceptable a las frecuencias naturales dadas por la solución exacta del modelo continuo. De ser correcto el modelo, este se utiliza para implementar el absorber dinámico de vibraciones que consistiría en agregar un grado de libertad al sistema. Más tarde, se determinan los parámetros que debe tener el absorber mecánico y se simulan ambos modelos: el modelo discreto de la viga en voladizo y el implementado con el absorber mecánico para cuantificar los resultados obtenidos. Se obtienen las gráficas de la simulación y se discuten los resultados.

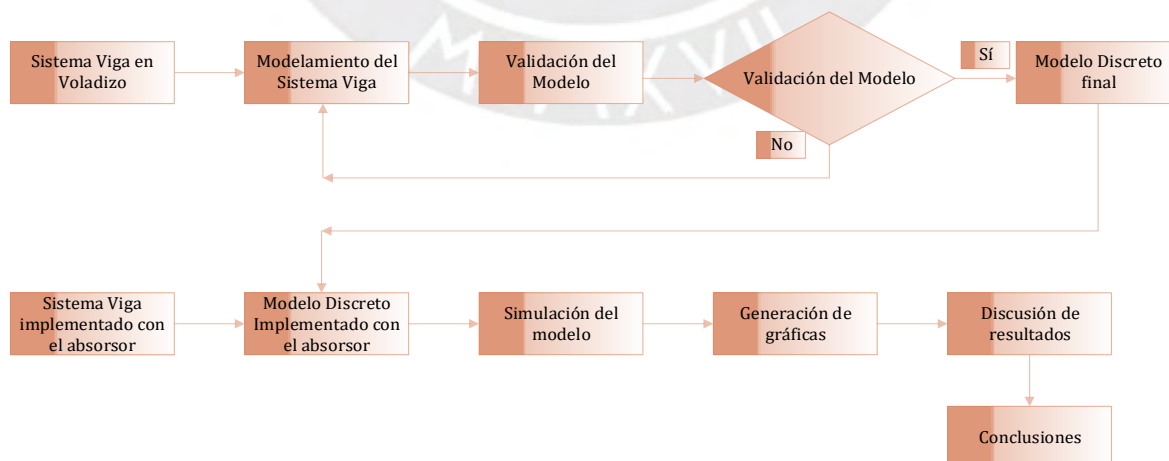


Figura 1. Estructura del trabajo de investigación

2. Modelamiento discreto del sistema viga en voladizo

El sistema real de la viga en voladizo excitado por una fuerza periódica ubicada en la zona más alejada del empotramiento es esquematizado en la Figura 2 elaborada. Se conoce que la deflexión de la viga en cada punto de su longitud está relacionada con las fuerzas aplicadas sobre ella, el teorema de Castigliano es utilizado para hallar esta relación que es representada por la llamada matriz de rigidez del sistema. La geometría de la viga sugiere distribuir uniformemente la toda la masa en un número finito de masas; sin embargo, está aún presente las incógnita de dónde ubicar las masas distribuidas, ya que será un factor importante en los resultados que varía significativamente el valor de las frecuencias naturales calculadas con el modelo discreto en comparación con las del modelo continuo cuyas ecuaciones están ampliamente estudiadas.

Se plantean entonces dos modelos mostrados en la Figura 3 y Figura 4 que constituyen un sistema de 4 grados de libertad cada uno. En el primer modelo discreto, se tiene la premisa de distribuir la ubicación de las masas en cada nodo que resulta de dividir la longitud de la viga en 4 partes; mientras que en el segundo modelo, se divide la viga en 4 intervalos de longitud en el que cada intervalo tiene una masa representativa ubicada en su centro.

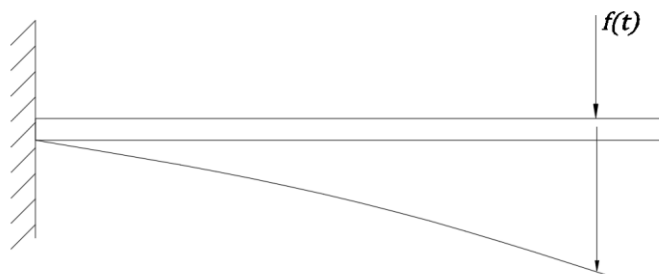


Figura 2. Esquema de viga empotrada bajo una fuerza de excitación armónica.

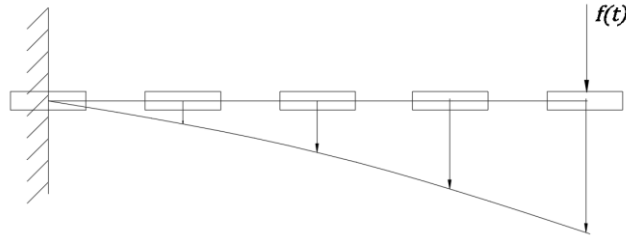


Figura 3. Primer modelo discreto de la viga

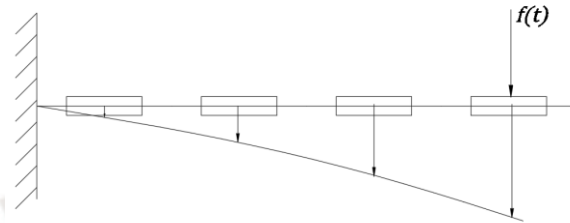


Figura 4. Segundo modelo discreto de la viga

2.1. Ecuaciones de movimiento

Para cuantificar la magnitud de la reducción de las amplitudes de vibración al momento de implementar el absorber mecánico sintonizado, deben determinarse primero las amplitudes de vibración del sistema excitado sin él. En este análisis, se utilizaron los dos modelos inicialmente obteniéndose una mejor aproximación a las frecuencias naturales del modelo continuo utilizando el segundo de la Figura 4, por lo que el siguiente procedimiento está referido al segundo modelo.

La geometría de la viga sugiere distribuir uniformemente la toda la masa en un número finito de masas; por tanto, el problema a analizar constituye uno de múltiples grados de libertad. Luego de simular el modelo en 2.2 se plantea distribuir la viga en 4 masas, suficiente aproximación para determinar las relaciones entre las variables de las amplitudes de vibración y frecuencia de excitación dentro del rango de las dos primeras frecuencias naturales. Además, permite trabajar con una cantidad de ecuaciones moderada para su procesamiento en MATLAB, ya que no

requieren de mucha capacidad computacional. Así el sistema a analizar constituye uno de 4 grados de libertad, toda la longitud de la viga es distribuida en 4 intervalos. Se considera la densidad lineal del material constante, entonces cada intervalo tiene una masa representativa ubicada en su centro, se elaboró la Figura 5 que muestra el modelo discreto general de n grados de libertad.

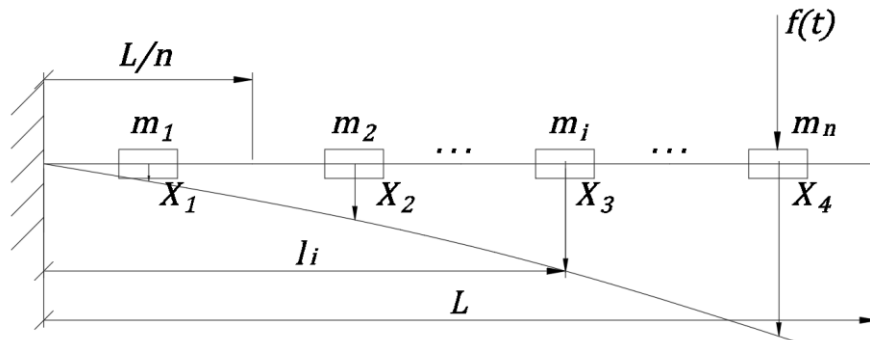


Figura 5. Modelo discreto de la viga para n DOF

Siendo

m_i	Masa de la i -ésima partición de la viga
l_i	Longitud desde el empotramiento hasta la i -ésima masa
X_i	Desplazamiento vertical de la i -ésima masa
L	Longitud total de la viga
n	Número de particiones de la viga
$f(t)$	Fuerza externa variante en el tiempo

Utilizando la segunda Ley de Newton a cada masa que conforma el sistema y ordenando en forma matricial se obtiene la ecuación diferencial del sistema (E.1), que gobierna su dinámica según sea

la fuerza aplicada. Cada matriz de coeficientes representan lo siguiente: M la matriz de masas, K la matriz de rigidez y F la matriz de fuerzas del sistema

$$M\ddot{X} + KX = F(t) \quad (E.1)$$

La **matriz de masas** se obtiene directamente luego de combinar cada ecuación diferencial correspondiente a cada masa utilizando la segunda Ley de Newton, obteniendo la siguiente forma

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

La **matriz de rigidez del sistema**, por el contrario, no se obtiene directamente y requiere encontrar la relación entre el desplazamiento transversal de cada masa y la fuerza provocada por la viga hacia la masa en ese punto. Esta relación se obtiene mediante el Teorema de Castigliano que requiere primero encontrar la expresión de la energía de deformación del sistema.

En el modelo analizado Figura 5 , cada masa se concentra en el centro de un intervalo de partición. Para n intervalos de partición, la distancia desde el empotramiento hasta cada masa está dada por la siguiente ecuación:

$$l_i = (2i - 1) \left(\frac{L}{2n} \right) \quad (E.2)$$

Cada masa m_i de los elementos luego de dividir la viga en los n intervalos produce una fuerza F_i sobre la misma viga. El desplazamiento de cada masa está en función de las demás fuerzas F_i , entonces, utilizando el principio de superposición, es posible analizar el efecto de las n fuerzas

sobre el sistema completo como la superposición de efectos de n sistemas con una sola fuerza actuando en cada uno, para representarlo gráficamente se elaboró la Figura 6.

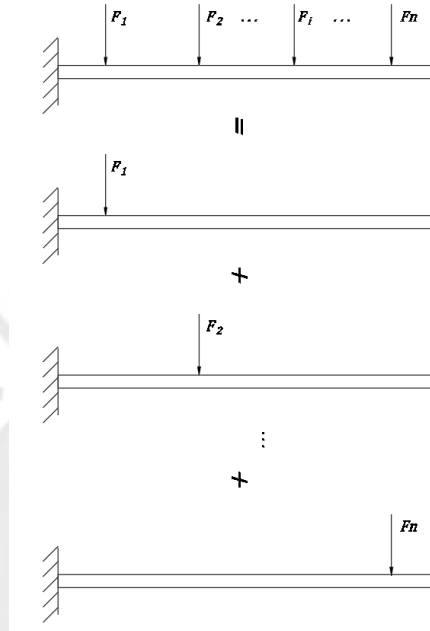


Figura 6. Superposición de fuerzas del sistema viga en voladizo

De acuerdo al Teorema de Castigliano, se requiere el momento flector en función de la posición sobre la viga y las fuerzas que actúan sobre ella. Entonces, se calcula el momento flector M_i causado por la fuerza F_i en cada sistema, esto se representa en la Figura 7 elaborada, obteniéndose la ecuación (E.3).

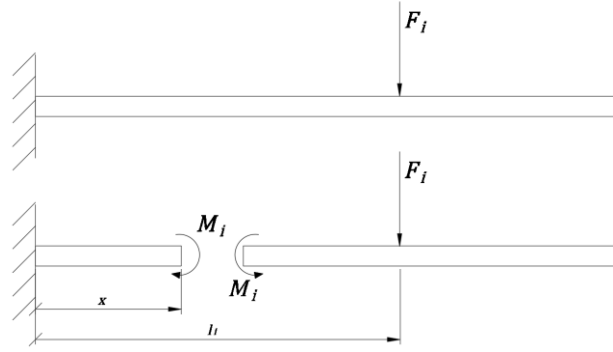


Figura 7. Momento flector de la sección x a lo largo de la viga para el i -ésimo sistema

$$M_i = F_i x - F_i l_i \quad (E.3)$$

Siendo

M_i

Momento flector producido por F_i a una distancia x del empotramiento

F_i

Fuerza sujeta a la i -ésima masa

x

Longitud desde el empotramiento hasta una sección cualquiera

De acuerdo al principio de superposición, el momento flector del sistema viga en voladizo es la suma de todos los momentos flectores de los n sistemas cada uno con su respectivo dominio.

$$M = \sum_{k=1}^n M_k \quad (E.4)$$

Derivando parcialmente la ecuación (E.4) con respecto de F_i se obtiene

$$\frac{\partial M_i}{\partial F_i} = x - l_i \quad (E.5)$$

Utilizando el Teorema de Castigliano para hallar la relación entre las fuerzas y el desplazamiento de cada masa se obtiene la expresión (E.6).

$$X_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \frac{1}{EI} \left(\sum_{j=1}^n \int_{L_{j-1}}^{L_j} \left(\sum_{k=1}^n M_k \right) \frac{\partial M_i}{\partial F_i} dx \right) \quad (E.6)$$

Siendo

$$\sum_{k=1}^n M_k$$

Momento flector total del sistema en una sección a una distancia x del empotramiento que es la suma de los momentos flectores de los n subsistemas.

$$\int_{L_{j-1}}^{L_j} dx$$

Los límites de integración en el dominio en el que la multiplicación de. La integral de la multiplicación de $\left(\sum_{k=1}^n M_k \right) \frac{\partial M_i}{\partial F_i}$ en el dominio en que el momento flector total de la sección y su derivada parcial tienen un valor distinto de cero.

- E Módulo de elasticidad del material de la viga
- I Momento de inercia de la sección transversal de la viga
- W Energía de deformación del sistema

Al evaluar la expresión (E.6) se obtiene el desplazamiento de cada masa en función de las fuerzas F_i , que al ser ordenados en forma matricial se tiene una expresión de la forma (E.7). En esta expresión, se conoce como la matriz de flexibilidad del sistema a (E.8) cuya inversa representa la matriz de rigidez del sistema que es la se desea conocer, (E.9).

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

$$K = H^{-1} \quad (\text{E.9})$$

2.2. Simulación numérica: validación del modelo discreto viga en voladizo

Los parámetros utilizados en la simulación se muestran en la Tabla 1 elaborada. Como se planteó en 2. Modelamiento discreto del sistema viga en voladizo, en el modelo utilizado, la viga es seccionada en un número finito de intervalo. Entonces, bajo la premisa de que el material es homogéneo, la densidad lineal permanece constante, por lo que se tienen masas iguales concentradas en cada punto medio de los intervalos.

Tabla 1

Parámetros de la viga utilizados en la simulación

Parámetro	Unidad	Magnitud
m_v	kg	4,71
b	mm	50
e	mm	10
ρ	kg/m^3	7850
A	m^2	$6 \cdot 10^{-4}$
E	N/m^2	$2,1 \cdot 10^{11}$
I	m^4	$5 \cdot 10^{-9}$

Un mayor número de grados de libertad permite aproximar más el modelo discreto a un sistema continuo. Se plantea la incógnita de, ¿cuántos grados de libertad son necesarios? En este sentido, se implementa un algoritmo con el procedimiento anteriormente desarrollado en MATLAB, Anexo A, y se hallan las frecuencias naturales del sistema de acuerdo al modelo discreto planteado según 3, 4 y 5 DOF, los resultados se muestran en la Tabla 2 elaborada.

Tabla 2

Frecuencias naturales de la viga en voladizo según los DOF utilizados

	3 DOF	4DOF	5 DOF	Continuo
$\omega_1 (rad / s)$	53,68	53,25	52,98	52,497
$\omega_2 (rad / s)$	360,93	346,13	339,76	328,99
$\omega_3 (rad / s)$	1160,05	990,15	969,02	921,19
$\omega_4 (rad / s)$	-	2104,95	1882,24	1805,16

En la Tabla 3, se hallan los errores porcentuales de las frecuencias naturales de la viga en voladizo halladas con el modelo propuesto respecto del sistema continuo. Se determina que para este estudio, es suficiente trabajar con 4 DOF para lograr los objetivos planteados dentro del rango de las 2 primeras frecuencias naturales. El error porcentual para la primera y segunda frecuencia natural es de 1,43% y 5,21% respectivamente, lo cual es aceptable. El uso de 5 DOF significaría de mucho esfuerzo computacional y demasiado manejo de ecuaciones lo que hace difícil su comprobación.

Tabla 3

Error porcentual de las frecuencias naturales halladas con el modelo discreto propuesto respecto del sistema continuo

	Error (%)		
	3 DOF	4DOF	5 DOF
$\omega_1(rad / s)$	2.25	1.43	0.92
$\omega_2(rad / s)$	9.71	5.21	3.28

La matriz de masa de la (E.1) al usar el modelo de 4 DOF resulta

$$M = \begin{bmatrix} 1,1775 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1775 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1775 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,1775 \end{bmatrix} kg$$

Al utilizar el algoritmo del Anexo A, que utiliza las ecuaciones desde (E.2) hasta (E.9) se obtiene la matriz de rigidez de la viga en voladizo:

$$K = \begin{bmatrix} 4.6760 & -1.3503 & 0.4383 & -0.0730 \\ -1.3503 & 1.0607 & -0.6683 & 0.1785 \\ 0.4383 & -0.6683 & 0.6710 & -0.2462 \\ -0.0730 & 0.1785 & -0.2462 & 0.1082 \end{bmatrix} 10^6 N/m$$

3. Vibración forzada del sistema viga en voladizo

En este procedimiento, se utilizará el análisis modal, cuyo objetivo es determinar los modos de vibración y las frecuencias naturales a las que corresponden cada uno de ellos. Al realizar un modelo analítico, se debe tener previamente un interés establecido de hacia qué modos de vibración que se buscan determinar (Rincón, Tejada & Jimenez de Cisneros, 2020). En este sentido, como el desarrollado está distribuido en 4 masas discretas, se puede determinar hasta un 4to modo de vibración. Asimismo, este método permite representar el sistema de 4 grados de libertad en 4 sistemas independientes de 1 grado de libertad que juntos describen al inicial. En ese sentido, a cada sistema independiente le corresponde a un modo de vibración; por tanto, la superposición de los movimientos de cada sistema independiente corresponderá al movimiento total del sistema de 4 DOF (sistema viga). Se tiene entonces la ecuación diferencial en forma matricial que representa el movimiento del sistema viga de la (E.1):

$$M \cdot \ddot{X} + K \cdot X = F(t)$$

3.1. Ecuaciones de movimiento en coordenadas modales

Para esta parte del análisis, se analiza el modelo discreto sin que actúe la fuerza externa, pues la matriz de forma de los modos solo depende de las características geométricas de la viga, no de factores externos.

$$M \cdot \ddot{X} + K \cdot X = \emptyset \quad (E.10)$$

Utilizando las coordenadas generalizadas modales representadas por la siguiente ecuación (E.11).
La contribución de cada modo de vibración mencionada en un inicio es representada por la matriz de forma de los modos U .

$$X(t) = Uq(t) \quad (E.11)$$

Siendo

U Matriz de forma de los modos

$q(t)$ Matriz de coordenadas modales

Es conocido que la ecuación diferencial en forma matricial de la (E.10) tiene la siguiente solución:

$$X(t) = V \cos(\omega t) \quad (E.12)$$

Derivando la anterior expresión respecto del tiempo se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{X}(t) = -\omega^2 V \cos(\omega t) \quad (E.13)$$

Reemplazando (E.12) y (E.13) en (E.10)

$$(-\omega^2 M + K) \cdot V \cos(\omega t) = \emptyset \quad (E.14)$$

A fin de hallar la matriz de forma de los modos se reemplaza (E.11) y (E.12) en (E.14) obteniéndose

$$(-\omega^2 M + K)Uq(t) = \emptyset$$

El vector de coordenadas modales $q(t)$ no puede ser una matriz nula, por lo que la suma entre paréntesis debe resultar nula, entonces se obtiene la expresión (E.15)

$$KU = \lambda U \quad (E.15)$$

Siendo λ la matriz de los valores propios correspondientes al vector propio U

$$\lambda = (w^2 M) \quad (E.16)$$

La expresión (E.17) representa un problema de vector y valor propio cuya solución ha sido ampliamente estudiada y escapa de los objetivos de este trabajo. Al resolverla, se obtienen **la matriz de valores propios** y la matriz de vectores propios que en este estudio, es la **matriz de forma de los modos de vibración**. Al ser la matriz de valores propios en (E.16) se obtiene

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n}{m_n}} \quad (E.17)$$

Siendo

ω_n

Frecuencias naturales del sistema de 4 DOF

λ_n

Valor propio correspondiente a cada coordenada modal

La ecuación diferencial del sistema en forma matricial en coordenadas modales resulta de reemplazar la (E.11) en la (E.1) y multiplicar la expresión resultante por la transpuesta de la matriz de forma de los modos U obteniéndose (E.18).

$$\bar{M} \ddot{q} + \bar{K} q = Q(t) \quad (E.18)$$

Siendo las matrices de masa \bar{M} , rigidez \bar{K} y fuerzas modales Q las siguientes expresiones:

$$\bar{M} = U^T M U$$

$$\bar{K} = U^T K U$$

$$Q = U^T F$$

Al hallar las matrices modales se obtienen matrices diagonales que multiplicadas por las correspondientes matrices \ddot{q} y q , se obtienen n ecuaciones diferenciales (según el número de grados de libertad) independientes entre sí. Juntas estas ecuaciones diferenciales representan la dinámica total del sistema pero pueden tratarse como sistemas independientes de 1DOF, (E.19).

$$m_n \ddot{q}_n + k_n q_n = Q_n(t) \quad (E.19)$$

La solución de cada ecuación diferencial de 1 DOF tiene la forma

$$q_n(t) = V_n \cos(\omega t) \quad (E.20)$$

Siendo

ω	Frecuencia de excitación de la fuerza externa
V_n	Amplitud de cada sistema modal
$q_n(t)$	Desplazamiento de cada sistema modal en función del tiempo
k_n	Rigidez en cada sistema modal
m_n	Masa en cada sistema modal
Q_n	Fuerza en cada sistema modal

De la teoría clásica de vibraciones en sistemas de 1DOF, la amplitud V_n está dada por la siguiente expresión:

$$V_n = \frac{Q_n}{m_m} \frac{1}{\omega_n^2 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (\text{E.21})$$

3.2. Simulación numérica y discusión de resultados

El procedimiento anteriormente descrito desde las ecuaciones (E.10) hasta (E.21) sirvió para implementar un algoritmo en MATLAB, Anexo B, pues se trabaja con sistemas de 4 DOF. El objetivo es cuantificar la respuesta del modelo discreto ante el caso de vibración forzada para más adelante comparar el nivel de atenuación de las vibraciones al implementarse el absorber pasivo. En este sentido, los valores utilizados son los de la Tabla 4 elaborada.

Tabla 4

Parámetros del modelo discreto para el caso de vibración forzada

Parámetro	Unidad	Magnitud
m_v	kg	4,71
b	mm	50
e	mm	10
ρ	kg/m ³	7850

A	m^2	6.10^{-4}
E	N/m^2	$2,1.10^{11}$
I	m^4	5.10^{-9}
F	N	1

Anteriormente en 2.2, se determinaron los valores de matriz de masa M y matriz de rigidez K del sistema viga en voladizo, los cuales se vuelven a utilizar para determinar el vector y valor propio del sistema. Utilizando el comando `eig()` de MATLAB en la (E.15) se obtiene la matriz de forma del sistema viga en voladizo y la matriz de valores propios:

$$U = \begin{bmatrix} -0.0264 & 0.1466 & 0.3248 & -0.9340 \\ -0.2087 & 0.6873 & 0.6140 & 0.3273 \\ -0.5011 & 0.5198 & -0.6776 & -0.1399 \\ -0.8394 & -0.4858 & 0.2416 & 0.0315 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = (w^2 M) = \begin{bmatrix} 0.0033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1411 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1544 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.2173 \end{bmatrix} 10^6$$

Reemplazando la matriz de forma y su transpuesta en el sistema de ecuaciones diferenciales en coordenadas modales de la (E.18) se obtiene

$$\bar{M} \ddot{q} + \bar{K} q = Q(t)$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1.1775 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.1775 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.1775 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 1.1775 \end{bmatrix} kg$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 3340,08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 141074,22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1154419,03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5217311,63 \end{bmatrix} N/m$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} -0.8394 \\ -0.4858 \\ 0.2416 \\ 0.0315 \end{bmatrix} \cos(\omega t) \frac{N}{m}$$

Se determinó la amplitud de cada sistema de 1DOF según sea la frecuencia de excitación con la (E.21) y se elaboró la Figura 8 . Como se mencionó en el inicio de este punto, estas ecuaciones de 1DOF describen el movimiento total del sistema, por lo cual en la Figura 2, en un caso particular en el que la frecuencia de excitación es 53 rad/s que es la primera frecuencia natural correspondiente al primer modo, la amplitud de la vibración del primer sistema de 1GDL tiende a ser infinito en un caso ideal (no amortiguamiento) mientras el resto de sistemas modales tiene una amplitud mínima cercana a cero. Esto es un indicio del predominio que tiene determinado modo sobre el movimiento total cuando la frecuencia es cercana a su frecuencia natural correspondiente.

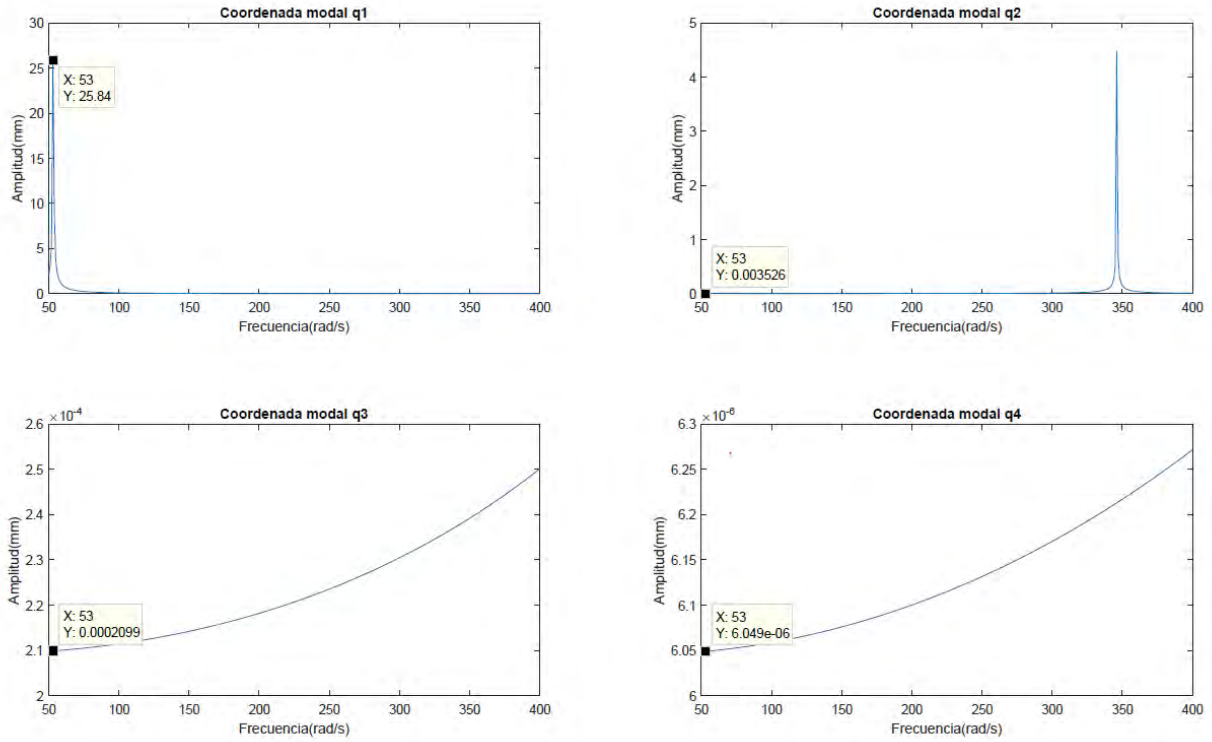


Figura 8. Amplitudes de cada sistema modal de 1 DOF

Se había presentado el hecho de que el análisis modal permite cuantificar la contribución de cada modo de vibración a la dinámica total del sistema al superponer los efectos de cada sistema independiente de 1 DOF mediante la (E.11). En este sentido, se desarrolla esta ecuación para obtener (E.22).

$$X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{31} \\ U_{41} \end{Bmatrix}^{\{1\}} & \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ U_{32} \\ U_{42} \end{Bmatrix}^{\{2\}} & \begin{Bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{33} \\ U_{43} \end{Bmatrix}^{\{3\}} & \begin{Bmatrix} U_{14} \\ U_{24} \\ U_{34} \\ U_{44} \end{Bmatrix}^{\{4\}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (E.22)$$

Se analiza la contribución de cada modo al movimiento total del sistema para las masas 1 y 4 excitando al sistema en 3 frecuencias: la cercanía de la 1ra frecuencia natural, la cercanía de la 2da frecuencia natural y una intermedia entre ellas, se elaboró la Tabla 5 con estos resultados. De acuerdo a lo calculado, en la cercanía de la primera frecuencia natural, la contribución del primer modo es prácticamente todo el valor de la magnitud, puesto que estos valores se superponen. De la misma forma, en la cercanía de la segunda frecuencia natural, la contribución del segundo modo es mucho mayor que la contribución de los demás modos.

En este sentido, si se trabajara con una frecuencia de excitación en la cercanía de una frecuencia natural determinada, bastaría analizar el sistema modal de 1DOF relacionada con esa frecuencia natural para determinar el movimiento de todo el sistema, pues las demás magnitudes son despreciables en su contribución.

Tabla 5

Contribución de cada modo al movimiento total del sistema para 3 frecuencias de excitación

$\omega = \omega_{n1} = 53 \text{ rad / s}$				
	$U_{n1}q_1$	$U_{n2}q_2$	$U_{n3}q_3$	$U_{n4}q_4$
$X_1(mm)$	6,8	$-5,16 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-5}$	$-5,9 \cdot 10^{-6}$
$X_4(mm)$	21,6	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$

$\omega = \omega_{n1} = 199 \text{ rad / s}$				
	$U_{n1}q_1$	$U_{n2}q_2$	$U_{n3}q_3$	$U_{n4}q_4$
$X_1(mm)$	$-5,1 \cdot 10^{-4}$	$-7,5 \cdot 10^{-4}$	$7,1 \cdot 10^{-5}$	$-5,7 \cdot 10^{-6}$
$X_4(mm)$	$-1,6 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$

$\omega = \omega_{n1} = 346 \text{ rad / s}$				
	$U_{n1}q_1$	$U_{n2}q_2$	$U_{n3}q_3$	$U_{n4}q_4$
$X_1(mm)$	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$-0,6$	$7,7 \cdot 10^{-5}$	$-5,8 \cdot 10^{-6}$
$X_4(mm)$	$-5,1 \cdot 10^{-3}$	$2,1$	$5,7 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-7}$

Se elaboró la Figura 9 a fin de mostrar la amplitud de cada masa en la que fue distribuida la viga en voladizo según sea la frecuencia de excitación. Estas amplitudes de cada masa se obtienen de sumar las contribuciones de cada sistema modal de 1DOF de acuerdo a (E.22). Se muestra que existan dos picos de amplitudes que corresponden a la cercanía de la primera y segunda frecuencia natural del sistema. Es vital saber la magnitud de estas amplitudes, puesto que más adelante se determinará en que porcentaje de ellas se reduce la amplitud de vibración cuando el absorber de vibraciones se implementa al sistema.

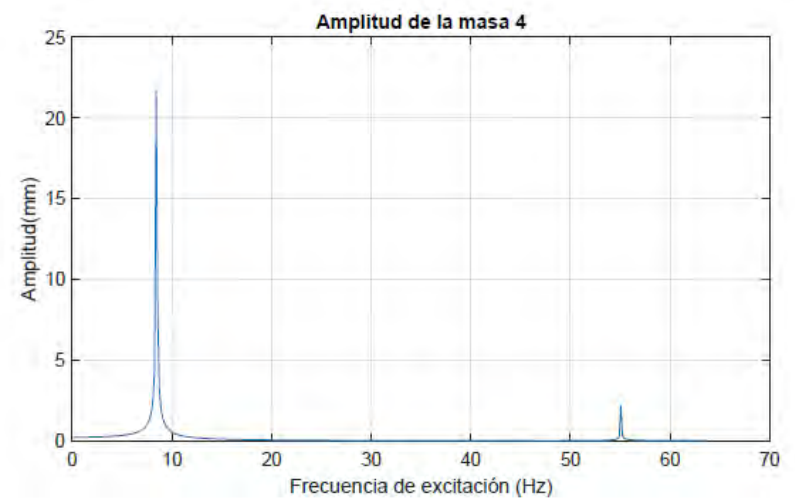
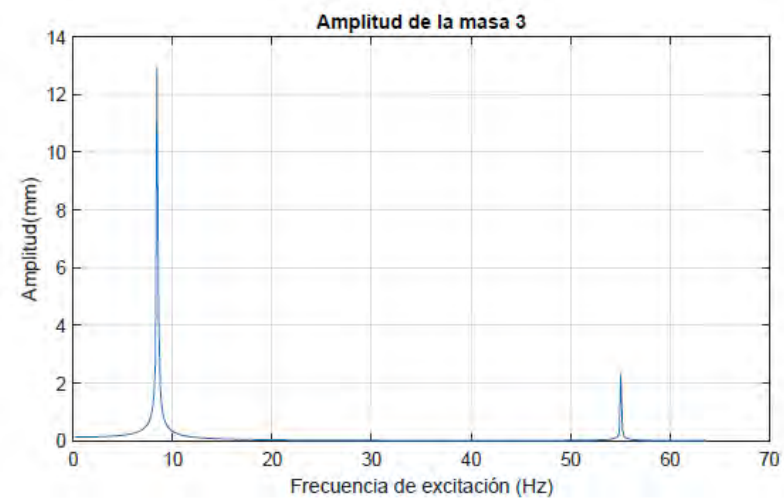
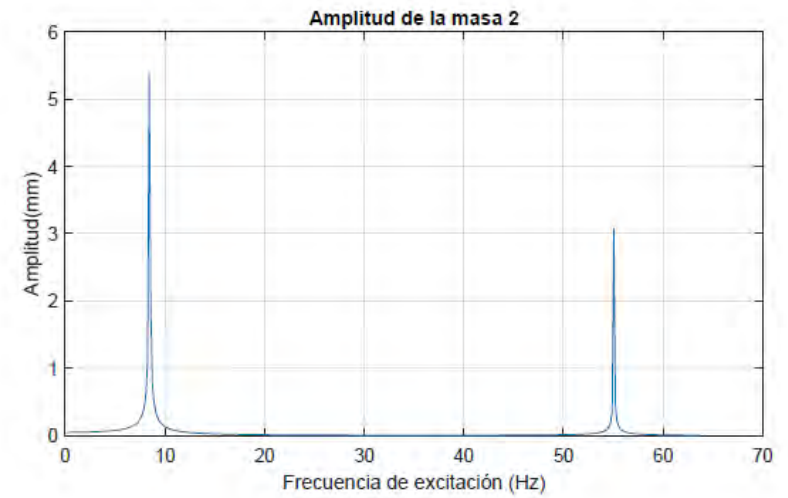
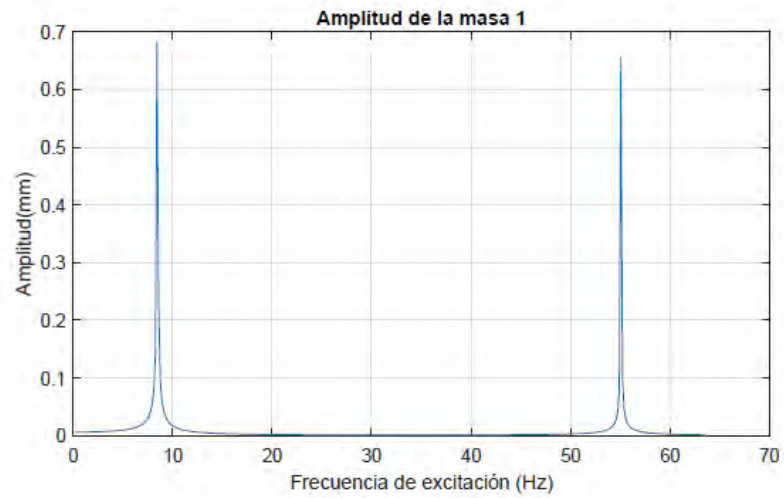


Figura 9. Amplitud de vibración de cada masa del sistema viga en voladizo según la frecuencia de excitación

4. El absorber dinámico de vibraciones

Es un sistema secundario que consta una masa y resorte que es acoplado a una máquina, estructura o cualquier sistema llamado sistema primario en el que existan amplitudes de vibración que se requieran atenuar especialmente cuando la frecuencia de esta vibración es cercana a una de las naturales del sistema, lo que produciría el fenómeno de resonancia (Rao, 2010).

Su importancia radica en que existen casos en los que la fuerza de excitación que provocan las vibraciones no deseadas no pueden eliminarse o cambiar la masa o rigidez del sistema para modificar la frecuencia natural y alejarla de la frecuencia de excitación resulta improbable debido a una situación específica; en estos casos, una tercera posibilidad es acoplar una masa sintonizada a la frecuencia de excitación mejor conocida como el absorber dinámico de vibraciones inventado por Frahm en 1909 (Den Hartog, 1956).

Se ha estudiado ampliamente la absorción de vibraciones en su caso más simple representado por un sistema de dos grados de libertad en literatura como Den Hartog (1956), Rao (2010), Warburton & Ayorinde (1980). En él, la relación que existe entre la masa del absorber y su rigidez está dada por la ecuación (E.23) que representa la frecuencia natural que tendría solo el sistema absorber de vibraciones de no estar acoplado al sistema primario.

El hecho de implementar un absorber con un valor de frecuencia natural igual a la frecuencia de excitación del sistema es debido a que la fuerza del resorte en todo instante será igual en magnitud pero en sentido opuesto a la fuerza que excita el sistema (Den Hartog, 1956). Con este mismo principio en mente, se extiende la teoría para el modelo propuesto que representa un sistema de múltiples grados de libertad, no solo de dos.

$$\omega_n^2 = \frac{k_a}{m_a} \quad (E.23)$$

Siendo

ω_n Frecuencia de excitación de la fuerza externa que en este trabajo es igual a la primera o segunda frecuencia natural del sistema

k_a Rigidez del absorsor de vibraciones

m_a Masa del absorsor de vibraciones



5. Modelamiento del sistema viga en voladizo-absorber de vibraciones

En este punto ya se tiene el modelo del sistema viga y las ecuaciones que gobiernan su dinámica, así como la respuesta a la fuerza armónica en su extremo y la magnitud de las amplitudes de vibración cuando la frecuencia de excitación es cercana a una de las naturales. Para atenuar estas amplitudes de vibración, se implementa el absorber de vibraciones en el modelo que consta de una masa y una rigidez en el modelo ya propuesto, Figura 10. En este análisis ideal, se considera que no hay amortiguamiento de ningún tipo que pueda intervenir en la dinámica del sistema.

En la sección 4 se explica que el absorber de vibraciones es un sistema secundario diseñado para atenuar la amplitud de vibración a una determinada frecuencia de excitación cuando es acoplado a un sistema primario. Valores de la masa, rigidez, carrera que tiene el absorber son el objeto de estudio en esta sección que sirven para dimensionar el sistema secundario.

Además, se estudia el hecho de que implementar el absorber de vibraciones añade un grado de libertad más al sistema obteniendo un sistema de 5 DOF y cambia las frecuencias naturales del mismo, por lo que se discutirá su influencia en la respuesta a la fuerza de excitación.

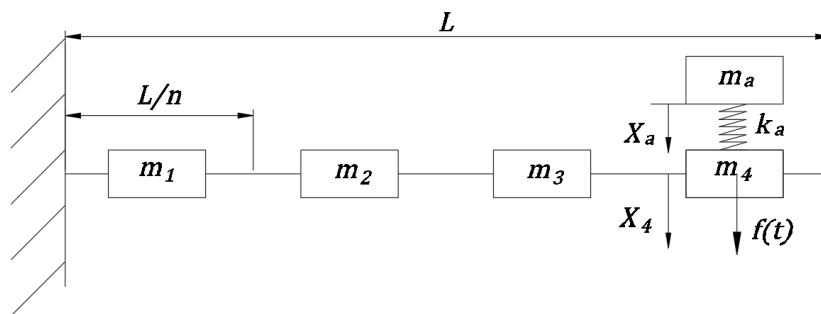


Figura 10. Sistema viga en voladizo-absorber de vibraciones

5.1. Ecuaciones de movimiento

De la misma forma que se obtuvo el sistema de ecuaciones diferenciales en forma matricial para el sistema viga en voladizo, se busca obtener otro sistema al implementar el absorber de vibraciones.



Figura 11. (a) DCL de la masa del absorber (b) DCL de la masa 4(extremo libre de la viga)

Utilizando la 2da Ley de Newton en las masas del absorber y cuatro en los diagramas de cuerpo libre de (a) y (b) en la Figura 11, se obtienen las ecuaciones (E.24) y (E.25)

$$m_a \ddot{X}_a + k_a X_a - k_a X_4 = 0 \quad (E.24)$$

$$m_4 \ddot{X}_4 - k_a X_a + k_a X_4 + F_4 = f \quad (E.25)$$

La fuerza F_4 representa la fuerza estructural de la viga sobre m_4 que puede calcularse con la matriz de rigidez ya hallada previamente en 2.2. Simulación numérica: validación del modelo discreto viga en voladizo. La relación entre las fuerzas que aplica la viga sobre cada masa es la multiplicación de la matriz de rigidez y los desplazamientos transversales de cada masa, (E.26).

$$F_s = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.26})$$

De (E.26), se determina F_4

$$F_4 = k_{41}X_1 + k_{42}X_2 + k_{43}X_3 + k_{44}X_4 \quad (\text{E.27})$$

Ordenando las ecuaciones (E.24), (E.25) y (E.27) en forma matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_a \\ X_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_a \\ X_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{41}X_1 + k_{42}X_2 + k_{43}X_3 + k_{44}X_4 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (\text{E.28})$$

De acuerdo al sistema de la(E.28), la implementación del absorber de vibraciones modifica el sistema original de ecuaciones diferenciales del sistema viga en voladizo sin absorber mostrado en (E.1), obteniéndose

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \\ \ddot{X}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} + k_a & -k_a \\ 0 & 0 & 0 & -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \end{Bmatrix} \text{Cos}(wt) \quad (\text{E.29})$$

En (E.29), se designan como M' a la matriz de masa, K' a la matriz de rigidez, \ddot{X}' a la matriz de aceleraciones, X' a la matriz de posiciones y F' a la matriz de fuerzas

$$M' = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_a \end{bmatrix}$$

$$K' = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} + k_a & -k_a \\ 0 & 0 & 0 & -k_a & k_a \end{bmatrix}$$

$$\ddot{X}' = \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \\ \ddot{X}_a \end{Bmatrix}$$

$$X' = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_a \end{Bmatrix}$$

$$F' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De nuevo, se asume que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales tiene la forma de

$$X'(t) = V' \cos(\omega t) \quad (\text{E.30})$$

Derivando la anterior expresión respecto del tiempo se obtiene

$$\ddot{X}'(t) = -\omega^2 V' \cos(\omega t) \quad (\text{E.31})$$

Reemplazando (E.30) y (E.31) en (E.29) y operando se obtiene el valor de la matriz de amplitudes de cada masa del sistema viga en voladizo-absorber de vibraciones

$$\begin{aligned} (-\omega^2 M' + K') V' &= F' \\ V' &= (-\omega^2 M' + K')^{-1} F' \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

5.2. Simulación numérica y discusión de resultados

En orden de cuantificar cuanto disminuye la amplitud de vibración de cada masa del sistema viga en voladizo al colocarse el absorber de vibraciones se utilizan los mismos parámetros de la viga de la Tabla 4, por lo que se utilizan la matriz de masas y rigidez halladas anteriormente en la sección 2.2. Estas matrices representan el caso sin absorber, por lo que debe añadirse el efecto de los parámetros del absorber de acuerdo a la ecuación (E.29).

$$M = \begin{bmatrix} 1,1775 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1775 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1775 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,1775 \end{bmatrix} kg$$
$$K = \begin{bmatrix} 4.6760 & -1.3503 & 0.4383 & -0.0730 \\ -1.3503 & 1.0607 & -0.6683 & 0.1785 \\ 0.4383 & -0.6683 & 0.6710 & -0.2462 \\ -0.0730 & 0.1785 & -0.2462 & 0.1082 \end{bmatrix} 10^6 \frac{N}{m}$$

5.2.1. Amplitudes de vibración del sistema implementado con el absorber de vibraciones

En vista de que el absorber de vibraciones es un sistema pasivo; es decir, las magnitudes de sus parámetros no pueden ser cambiadas sin hacer una modificación física luego de ser implementado, **se tienen dos casos de sintonización: en la primera y segunda frecuencia natural**. No es posible sintonizar solo un absorber en dos frecuencias de excitación distintas. De acuerdo a lo presentado en la sección 4, el valor de la rigidez del absorber está en función de la frecuencia en la que se desea atenuar las vibraciones y el valor de la masa del absorber según (E.23); por consiguiente, a la masa seleccionada del absorber le corresponde una rigidez determinada, se elabora la Tabla 6 a fin de mostrar estos parámetros.

Se implementa un algoritmo con el procedimiento desde la (E.29) hasta (E.32) en MATLAB, detallado en Anexo C, obteniéndose la Figura 12 y Figura 13.

Tabla 6

Parámetros del absorber según la frecuencia de excitación en la que se desea atenuar las vibraciones

	Masa del absorber	Rigidez sintonizada
	$m_a \text{ (kg)}$	$k_{afn} \left(\frac{N}{m} \right)$
1ra frecuencia natural 8,48 Hz	0,05	141,82
2da frecuencia natural 55,08 Hz	0,05	5990,29

Sintonizado a la primera frecuencia natural, se elabora la Figura 12 que muestra la amplitud de vibración de cada masa que conforma el modelo discreto según la fuerza de excitación. Se manifiesta que existe una frecuencia de excitación-entre los picos de amplitud-en la cual la amplitud de vibración disminuye considerablemente. Esta frecuencia es la sintonizada por el absorber de vibraciones, en este caso, la primera frecuencia natural 8,483 Hz pues es el caso crítico del sistema viga en voladizo. En cercanía de la primera frecuencia natural -8,435 Hz- la amplitud de vibración de cada masa se reduce al 0,32% de su valor mostrado en Figura 9, por lo que el absorber es efectivo y la fuerza de excitación deja de producir una amplitud de vibración no deseada en el sistema primario viga en voladizo. En su lugar, es la masa sintonizada del absorber la que aumenta su amplitud de vibración.

Además se muestran nuevos picos de amplitud debido resultado de añadir una masa del absorber más al sistema que agrega un grado de libertad y modifica las frecuencias naturales originales. Los

nuevos picos se manifiestan alrededor de la frecuencia en la que se desea atenuar la amplitud de vibración 8,435 Hz; es decir, la frecuencia natural solo del sistema secundario absorbente de vibraciones si este estuviera desacoplado del primario. Estos nuevos picos representan los límites del rango de frecuencias de excitación en el que el absorbente es efectivo, pues de acercarse la frecuencia de excitación a alguno de estos límites, la amplitud crecería que es lo que en un inicio se desea evitar. Esta es la razón de que el absorbente de vibraciones trabaje en un rango pequeño de frecuencias alrededor de la frecuencia para la que fue diseñado. Este análisis resulta sumamente importante pues no solo el sistema primario volvería al estado inicial que se requería evitar, sino el absorbente el absorbente aumentaría su amplitud de vibración en un espacio diseñado para una menor carrera.

Sintonizado a la segunda frecuencia natural, se elabora la Figura 13 con el mismo propósito que la anterior. En este caso, en cercanía de la segunda frecuencia natural-55,07 Hz- la amplitud de vibración de cada masa se reduce al 0,0059% de su valor en el caso que no tuviera el absorbente de vibraciones, Figura 9. Se evidencia también otro comportamiento: de excitar el sistema en cercanía de su primera frecuencia natural original-8,435 HZ- la amplitud de vibración se reduciría en 47,18% de su valor, pues ahora se tienen nuevas frecuencias naturales y 8,435 Hz resulta más alejado de la nueva frecuencia natural que la original.

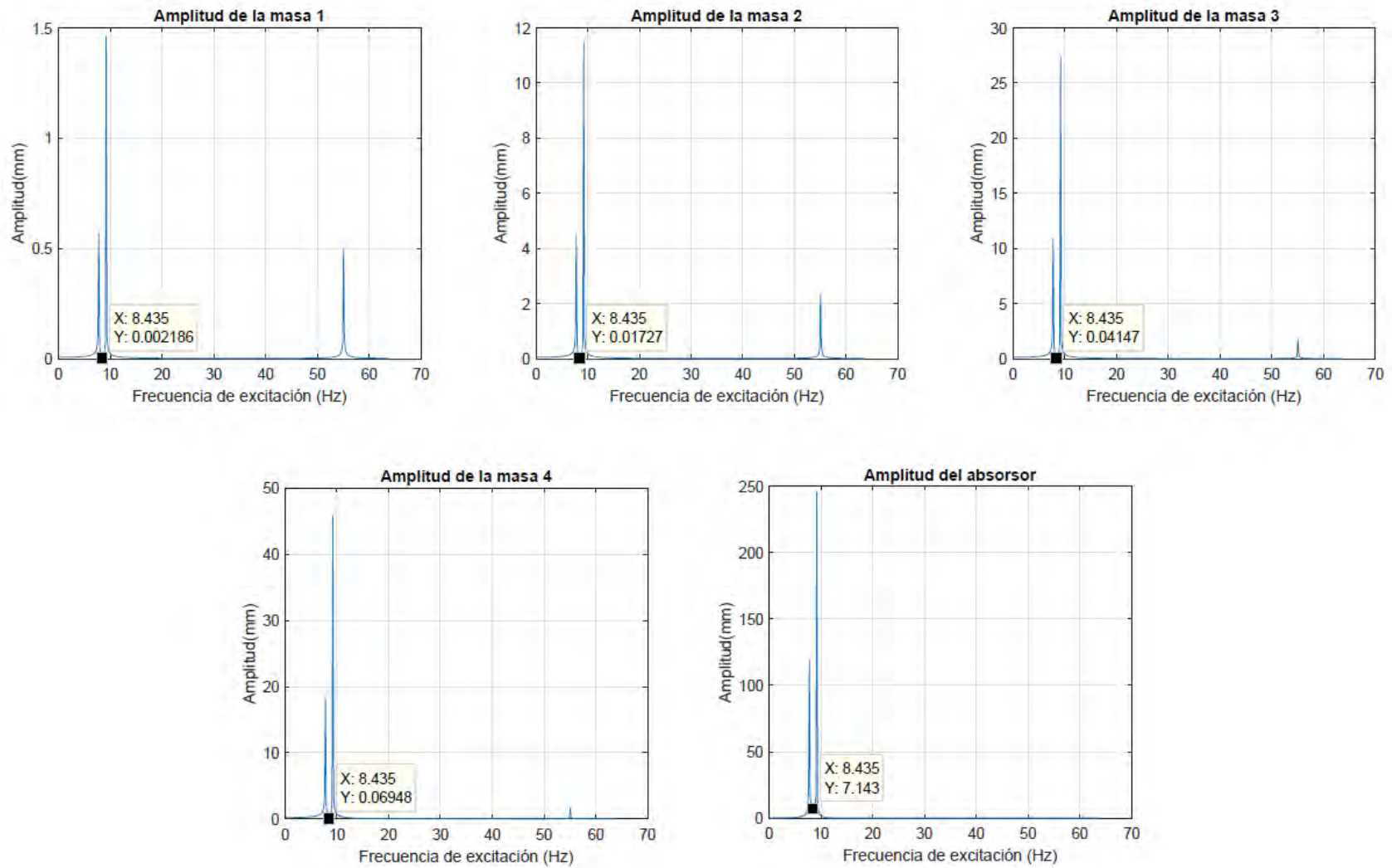


Figura 12. Amplitud de vibración de cada masa del sistema implementado con el absorber de vibraciones sintonizado a la 1ra frecuencia natural con una masa del absorber de 0,05kg

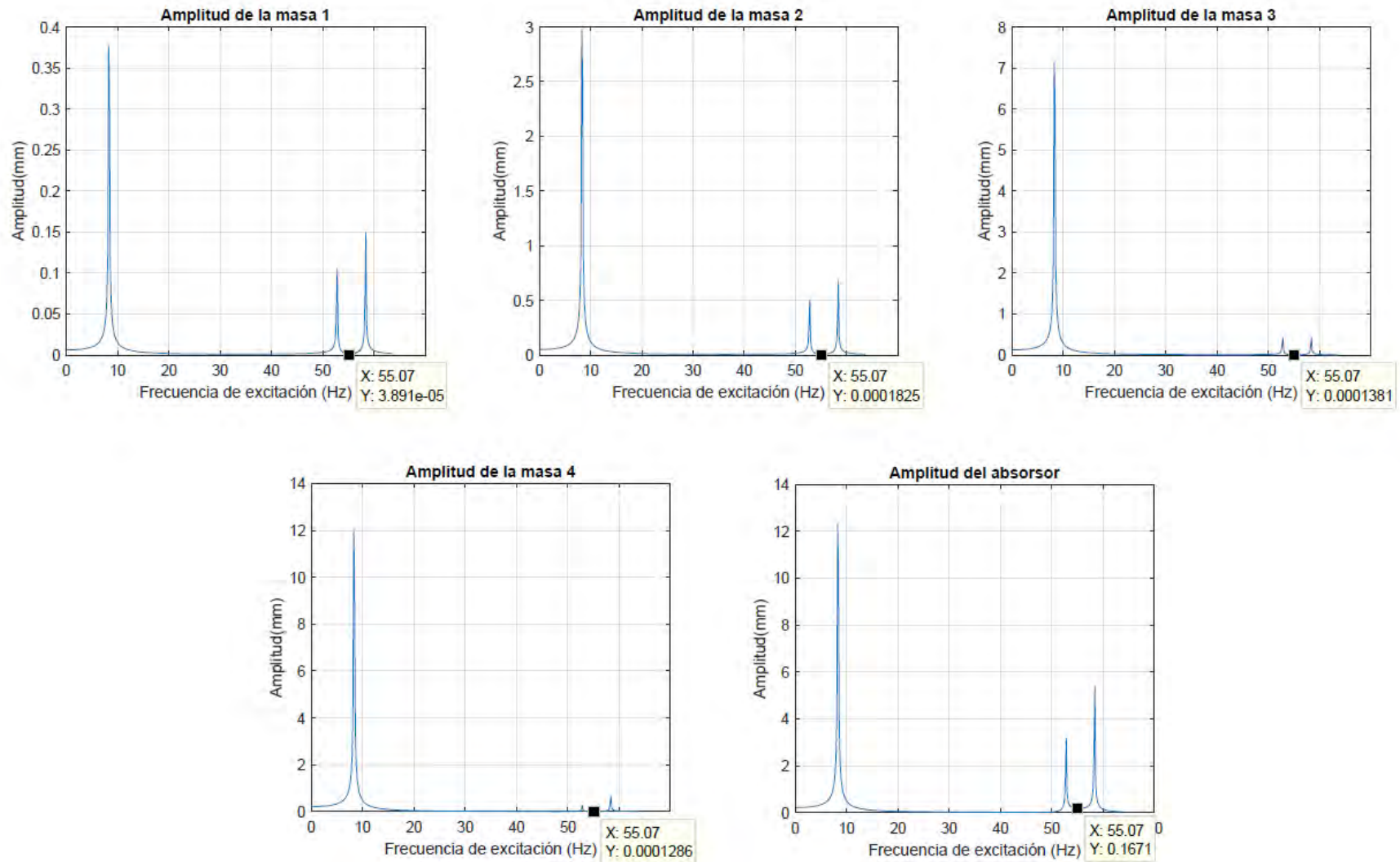


Figura 13. Amplitud de vibración de cada masa del sistema implementado con el absorber de vibraciones sintonizado a la 2da frecuencia natural con una masa del absorber de 0,05kg

5.2.2. Influencia de la masa del absorber en la reducción de la amplitud de vibración del sistema

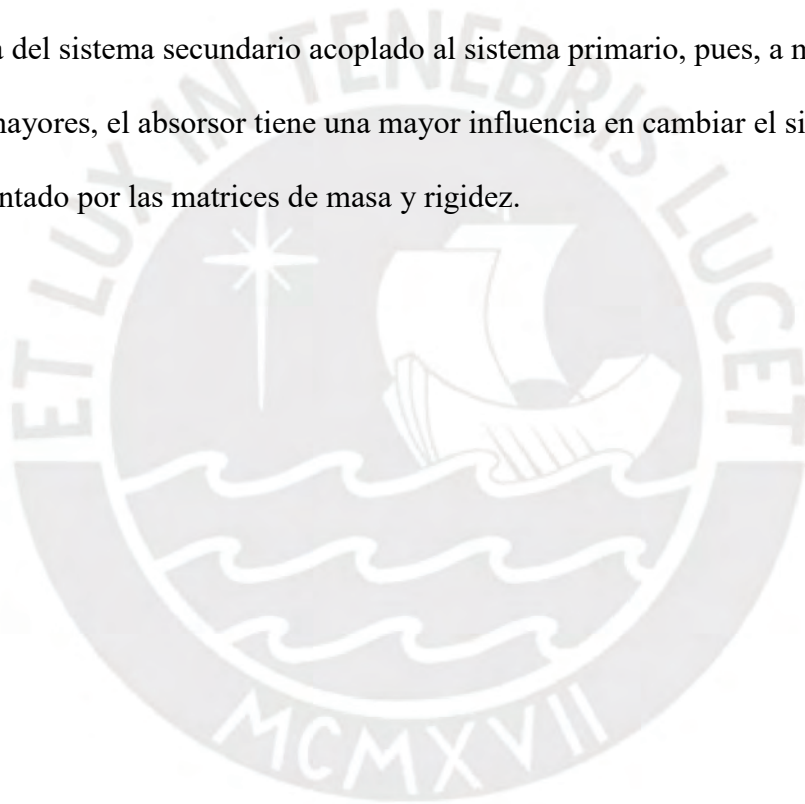
En orden de cuantificar la influencia de la masa del absorber en la reducción de la amplitud de vibración del sistema primario viga en voladizo, se realiza la simulación con diferentes valores de masa del absorber implementado un algoritmo en MATLAB con el procedimiento, Anexo D. Se elaboró la Figura 14 en el caso de sintonizarse a la primera frecuencia natural y, en caso de sintonizarse a la segunda, se elaboró la Figura 15. De acuerdo a la (E.23), el valor de la rigidez del absorber está en función de la frecuencia en la que se desea atenuar las vibraciones y el valor de la masa del absorber; por consiguiente, a cada valor de la masa del absorber de la simulación le corresponde una rigidez determinada mostradas en la Tabla 7 elaborada.

Tabla 7

Rigidez del absorber según la frecuencia natural y masa del absorber

Masa del absorber	Rigidez sintonizada a la 1ra frecuencia natural	Rigidez sintonizada a la 2da frecuencia natural
$m_a (kg)$	$k_{af1} \left(\frac{N}{m} \right)$	$k_{af2} \left(\frac{N}{m} \right)$
0,005	14,18	599,03
0,05	141,82	5990,29
0,1	283,66	11980,59

Sintonizado a la primera frecuencia natural, se tiene la Figura 14 que representa la amplitud del extremo de la viga en función de la frecuencia de excitación para las magnitudes de las masas mostradas en la Tabla 7. Se elige trabajar la gráfica con el extremo de la viga pues en cercanía de la primera frecuencia natural, gobierna el primer modo cuya mayor amplitud se da en el extremo libre de la viga en voladizo. Asimismo, se manifiesta que el rango de frecuencias entre los picos de amplitud incrementa con el aumento de la magnitud de la masa del absorber; entonces se amplía el rango en el que el absorber de vibraciones es efectivo. Este resultado es el efecto de aumentar la masa del sistema secundario acoplado al sistema primario, pues, a medida que sus parámetros son mayores, el absorber tiene una mayor influencia en cambiar el sistema viga en voladizo, representado por las matrices de masa y rigidez.



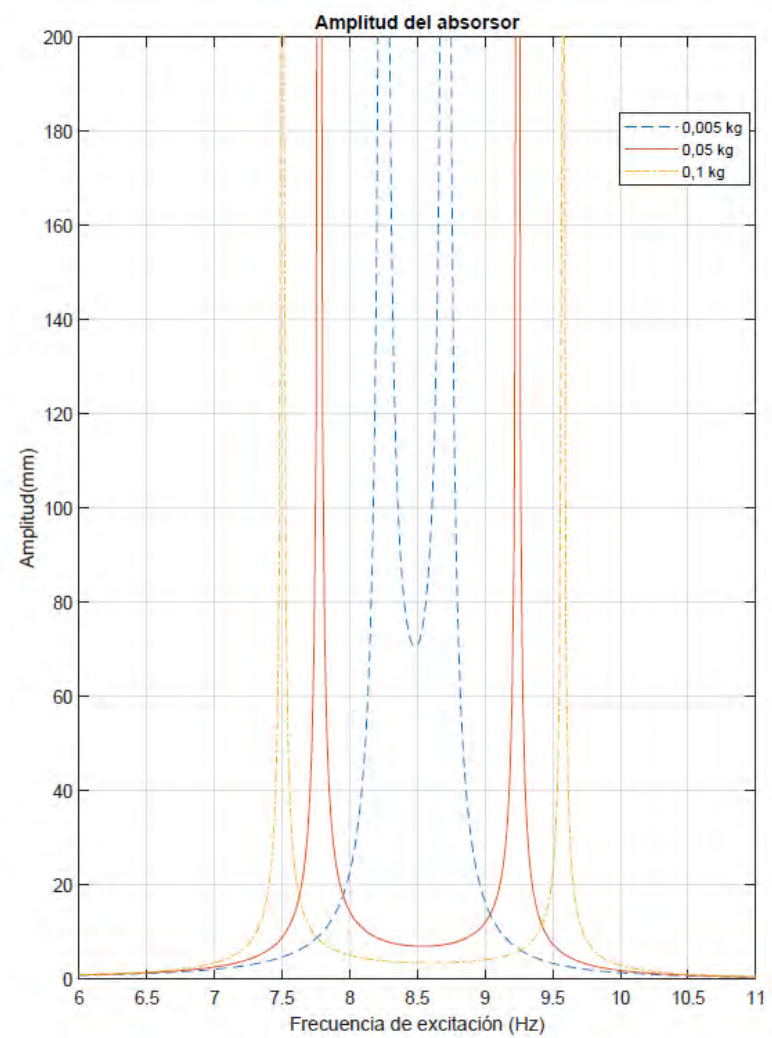
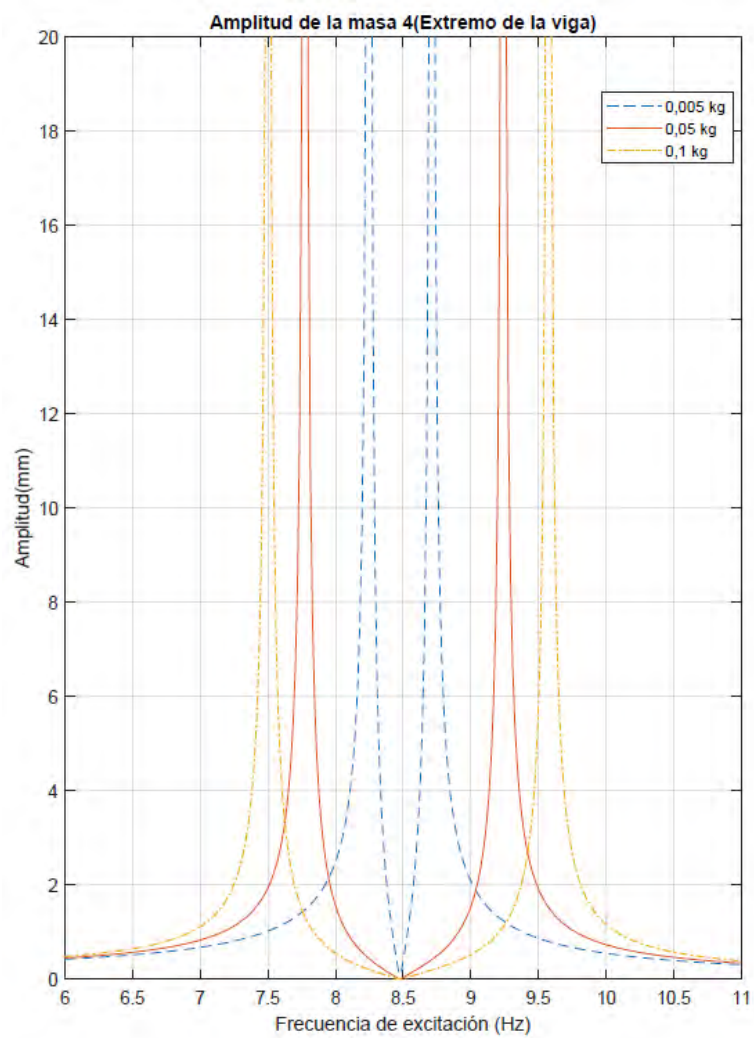


Figura 14. Amplitud del extremo de la viga implementado con el absorbor de vibraciones sintonizado a la 1ra frecuencia natural para distintas magnitudes de masa del absorbor

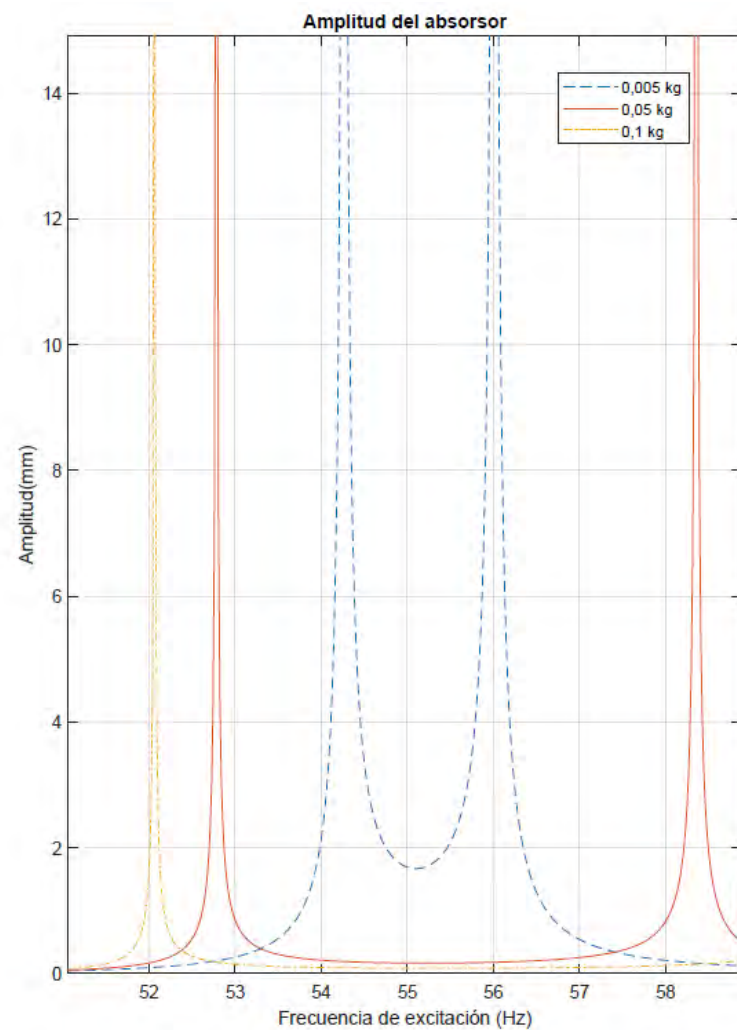
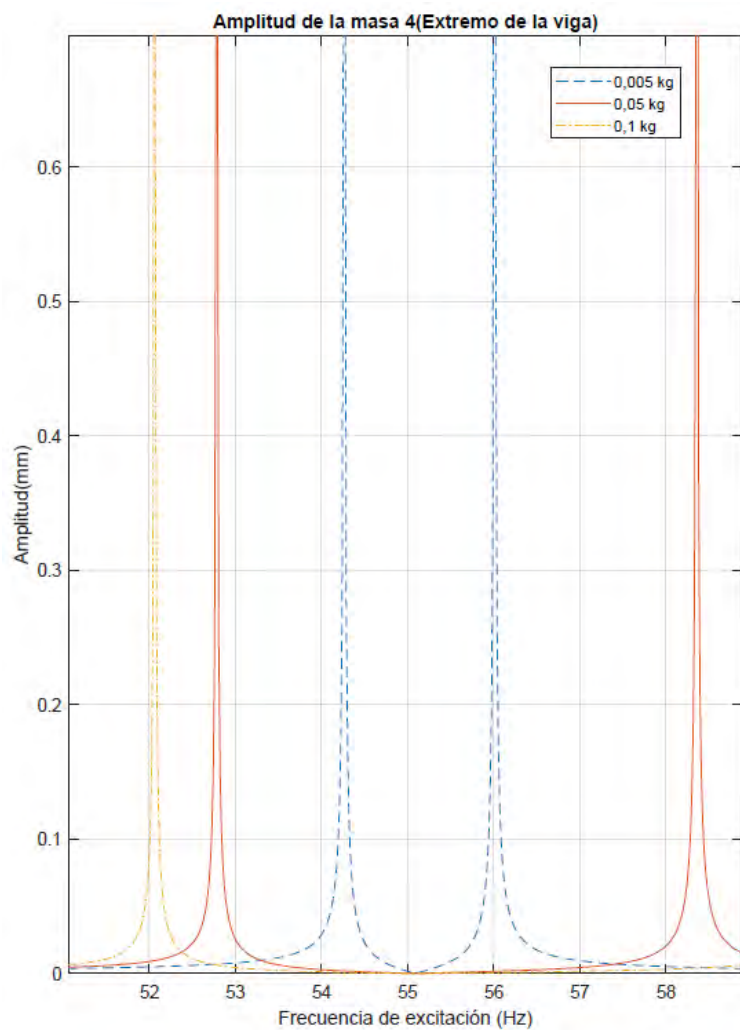


Figura 15. Amplitud del extremo de la viga implementado con el absorber de vibraciones sintonizado a la 2da frecuencia natural para distintas magnitudes de masa del absorber

6. Conclusiones

Un modelo discreto de múltiples grados de libertad de una viga en voladizo implementado con un absorber dinámico de vibraciones fue propuesto para controlar la amplitud de las vibraciones y obtener su respuesta ante la excitación de una fuerza de naturaleza armónica. Los resultados manifiestan que la implementación del absorber dinámico de vibraciones resulta una excelente alternativa para atenuar vibraciones no deseadas de un sistema, logrando reducirlas hasta el orden menor al 1% de la amplitud original.

La contribución teórica de esta investigación radica en que el procedimiento propuesto no solo se limita al análisis del sistema elegido. Los sistemas reales suelen aproximarse como un sistema de múltiples grados de libertad, pues las ecuaciones de diferencias ordinarias que gobiernan su movimiento resultan más fáciles de analizar. En este sentido, el análisis presentado para la implementación del absorber de vibraciones y determinación de sus parámetros puede ser utilizado en sistemas de múltiples grados de libertad que representen diferentes sistemas reales.

De los resultados en el modelamiento del sistema viga en voladizo y la elección de los parámetros del absorber de vibraciones se concluye lo siguiente:

- El modelamiento del sistema real influye significativamente en los resultados obtenidos para la matriz de masa y rigidez que representan el sistema viga en voladizo; por tanto, influye también en la determinación de parámetros de la masa y rigidez que debe tener el absorber dinámico de vibraciones.

- La implementación del absorber de vibraciones añade un grado de libertad más al sistema y cambia las frecuencias naturales de este. La frecuencia de excitación en la que se desea atenuar las vibraciones, llamada aquí frecuencia de absorción, es el mismo valor que la frecuencia que tiene el sistema secundario-absorber de vibraciones-desacoplado. Además, los nuevos picos de frecuencia de excitación se manifiestan alrededor de esta frecuencia de absorción.
- El rango de trabajo en el que el absorber de vibraciones es efectivo se define como el rango de frecuencias de excitación entre los picos de amplitud correspondientes a las nuevas frecuencias naturales, resultado de añadir el absorber de vibraciones al sistema. Este rango depende directamente de la masa del absorber de elegido; de manera que una mayor magnitud de masa del absorber, amplía el rango de trabajo. Sin embargo, una mayor masa del absorber produce una mayor influencia en el sistema primario en el que es acoplado como cambios en sus frecuencias naturales o deformaciones estáticas que este podría producir al sistema.
- Es de suma importancia que de variar la frecuencia de excitación por algún factor externo, no alcance alguna de estas nuevas frecuencias naturales que se encuentran alrededor de la frecuencia para la cual fue diseñado el absorber, pues nuevamente se tendrían grandes amplitudes que se buscaban atenuar en un inicio.

Bibliografía

Den Hartog, J. P. (1956). *Mechanical Vibrations* (McGraw-Hill (ed.); 4th ed.).

<https://doi.org/10.1038/169641b0>

Gonzalez-Buelga, A., Clare, L. R., Neild, S. A., Jiang, J. Z., & Inman, D. J. (2015). An electromagnetic inerter-based vibration suppression device. *Smart Materials and Structures*, 24(5). <https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/5/055015>

Rao, S. S. (1952). *Mechanical Vibrations* (5th ed., Vol. 169, Issue 4303). Pearson.

<https://doi.org/10.1038/169641b0>

Rincón Ruiz, C. G., Tejada Cardaña, M. A., & Jimenez de Cisneros Fonfría, J. J. (2020). Design and analysis of an automatic shell cracking machine of metohuayo (“caryodendron orinocense karst”) with a capacity of 50 kg/h. *Agriculture (Switzerland)*, 10(11), 1–23. <https://doi.org/10.3390/agriculture10110537>

Sauvé, R. G., Tabatabai, M., Morandin, G., & Kozluk, M. J. (1998). *APPLICATION OF FLOW-INDUCED VIBRATION PREDICTIVE TECHNIQUES TO OPERATING STEAM GENERATORS*.

Warburton, G. B., & Ayorinde, E. O. (1980). Optimum absorber parameters for simple systems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 8(3), 197–217. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290080302>

Anexo A: Algoritmo para el cálculo de las frecuencias naturales del modelo discreto

```
%DECLARACION DE VARIABLES
syms sum_M x F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 n l E I;
syms w1 w2 w3 w4 w5 w6 w7 w8;
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 K;
n=4; %Número de masas=Numero de grados de libertad
F=[F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7];%Matriz de fuerzas
diff_w=[w1 w2 w3 w4 w5 w6 w7];% Derivada de la energia de deformación parcial del sistema viga respecto de
cada fuerza

%LONGITUD DE CADA DEL CENTRO DE CADA MASA RESPECTO DEL EXTREMO EMPOTRADO
for i=1:n;
    L(i+1)=(2*i-1)*(l/(2*n));
end
L

%SUMA DE MOMENTOS EN UNA SECCIÓN PRODUCIDO POR LA FUERZA DE CADA MASA
sum_M(1)=0;
for i=1:n;
    M=F(i)*x-L(i+1)*F(i) %Momento en una seccion x producido por la fuerza correspondiente a la masa i
    sum_M(i+1)=sum_M(i)+M; %Suma de momentos en la seccion
end
sum_M

%DERIVADA DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN LA VIGA RESPECTO DE CADA FUERZA i
for k=1:n;
    diff_parcial=diff(sum_M(n+1),F(k));%Derivada parcial del momento con respecto de la fuerza
    sum_S=0;

    %Integral de la la suma de momentos en la seccion multiplicada por la derivada parcial del momento
    respecto de cada fuerza
    for i=1:k;
        S=int((sum_M(n+1)-sum_M(i))*diff_parcial,x,L(i),L(i+1));
        sum_S=sum_S+S;
    end

    sum_S
    diff_w(k)=(1/(E*I))*sum_S; %Derivada de la energia de deformacion segun la fuerza
end
diff_w;

%ORDENAR DE FORMA MATRICIAL LA MATRIZ DE FUERZAS Y LA MATRIZ DE COORDENADAS
%PARA OBTENER LA MATRIZ DE RIGIDEZ
eqns=[x1==diff_w(1) x2==diff_w(2) x3==diff_w(3) x4==diff_w(4)]; %Matriz de coordenadas
vars=[F1 F2 F3 F4];%Matriz de fuerzas
[A,b]=equationsToMatrix(eqns,vars)%A es la matriz de flexibilidad y b es la matriz de fuerzas
K=(-1*A)^-1 %Matriz de rigidez del sistema

K_valores=double(subs(K,[l E I],[1 2.1*10^11 5*10^(-9)]));%Valores de la matriz de rigidez del sistema
segun los parametros de la viga

%DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS NATURALES
syms m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 w rho A
m=4.71/(n) %Masa de cada parte de la viga distribuida
M=[m1 0 0 0; 0 m2 0 0; 0 0 m3 0; 0 0 0 m4]; %Matriz de masas
M_valores=subs(M,[m1 m2 m3 m4],[ m m m m]); %Valores de la matriz de masas

impedancia=-(w^2)*M_valores+K_valores; %Impedancia mecánica
determinante= det(impedancia); %Determinante de la impedancia mecánica
w_modelo=double(solve(determinante,w)); %Frecuencias naturales del modelo discreto

%FRECUENCIAS NATURALES REALES DADAS POR EL MODELO CONTINUO
w_real=[ 1.875104^2;4.694091^2;7.854757^2;10.995541^2]*(E*I/(rho*A*1^4))^(1/2);
w_real_valores=double(subs(w_real,[l E I rho A],[1 2.1*10^11 5*10^(-9) 7850 6.000000000000000e-04]));
```


Anexo B: Algoritmo para el cálculo de la contribución de cada modo y amplitudes de vibración

```
%DECLARACION DE VARIABLES
syms w %Frecuencia de excitacion
K_valores %Matriz de rigidez del sistema viga en voladizo calculado con NumerodeGDL.m
M_valores %Matriz de masa del sistema viga en voladizo calculado con NumerodeGDL.m
F=[0;0;0;1] %Matriz de fuerzas de excitacion
frecuencias=1:1:400 %Frecuencias de excitacion de la fuerza armonica

%DETERMINAR MATRIZ DE FORMA DE LOS MODOS
[U,Lamda]=eig(K_valores) %Se determina la matriz de forma de los modos y la matriz de valores propios
Lamda
for i=1:n
fn(1,i)=double((Lamda(i,i)/M_valores(i,i))^(1/2)) %Frecuencias naturales del sistema
end

%DETERMINAR LAS MATRICES MODALES
M_modal=double(U.'*M_valores*U) %Matriz modal de masas
K_modal=double(U.'*K_valores*U) %Matriz modal de rigidez
Q_modal=double(U.'*F) %Matriz modal de fuerzas

%DETERMINAR EL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1DOF INDEPENDIENTES
%EN COORDENADAS MODALES
for i=1:n
    format short
    q(i,1)=(Q_modal(i)/M_modal(i,i))*1/((fn(1,i)^2)*(1-(w/fn(1,i))^2)); %Coordenadas modales de 1DOF
end

%GRAFICO DE AMPLITUDES DE CADA COORDENADA MODAL SEGUN LA FRECUENCIA DE
%EXCITACION
for k=1:n;
for i=1:400;
q_valores(k,i)=double(subs(q(k),[w],[frecuencias(i)]));%Amplitudes de cada coordenada modal
end
end

for k=1:n
    hold on
    subplot(2,2,k)
    plot(frecuencias/(2*pi),q_valores(k,:))%Amplitud de las coordenadas modales en funcion de la frecuencia
de excitacion
    grid on
    xlabel('Frecuencia de excitación (Hz)');
    ylabel('Amplitud(mm)');
    title('Amplitud de la coordenada modal')
end
hold off
```

Anexo C: Algoritmo para el cálculo de amplitudes de vibración con el absorber de vibraciones implementado

```
%DECLARACION DE VARIABLES
syms w %Frecuencia de excitacion
K_valores %Matriz de rigidez del sistema viga en voladizo calculado con NumerodeGDL.m
M_valores %Matriz de masa del sistema viga en voladizo calculado con NumerodeGDL.m
F=[0;0;0;1;0] %Matriz de fuerzas de excitacion
frecuencias=1:1:400 %Frecuencias de excitacion de la fuerza armonica
ma=0.05 %Masa del absorber de vibraciones
ka=fn(1)^2*ma %Rigidez del absorber sintonizado a la primera frecuencia natural

%IMPLEMENTAR ABSORBER DE VIBRACIONES AL SISTEMA VIGA EN VOLADIZO
K_modificado=K_valores
M_modificado=M_valores
K_modificado(4,4)=K_valores(4,4)+ka %Se añade en la matriz de rigidez la rigidez del absorber
K_modificado(4,5)=-ka
K_modificado(5,4)=-ka
K_modificado(5,5)=ka
M_modificado(5,5)=ma %Se añade la masa del absorber

%AMPLITUD DEL SISTEMA CON ABSORBER
Z_modificado=-w^2*M_modificado+K_modificado; %Impedancia mecanica del sistema con las matrices de masa y
rigidez modificadas por los parametros del absorber
X_CA=Z_modificado^(-1)*F %Amplitudes de cada masa con absorber en funcion de la frecuencia de excitacion

for k=1:n+1;
    for i=1:400;

        X_CA_valores(k,i)=double(subs(X_CA(k),[w],[frecuencias(1,i)]));%Amplitudes de cada masa segun el
valor de la frecuencia de excitacion
    end
end

%Gráfico de amplitudes de cada masa con absorber
for k=1:n+1
    hold on
    subplot(2,3,k)
    plot(frecuencias/(2*pi),abs(X_CA_valores(k,:))*1000);
    grid on
    xlabel('Frecuencia de excitación (Hz)');
    ylabel('Amplitud(mm)');
    title('Amplitud de la masa')
end
```

Anexo D: Algoritmo para el cálculo de las amplitudes de vibración con el absorber implementado para diferentes magnitudes de su masa

```
%DECLARACION DE VARIABLES
syms w ma ka %Frecuencia de excitacion
K_valores %Matriz de rigidez del sistema viga en voladizo calculado con NumerodeGDL.m
M_valores %Matriz de masa del sistema viga en voladizo calculado con NumerodeGDL.m
F=[0;0;0;1;0] %Matriz de fuerzas de excitacion
frecuencias=320:0.1:370 %Frecuencias de excitacion de la fuerza armonica
ma_valores=[0.005 0.05 0.1] %Masas del absorber
ka_valores=fn(2)^2*ma_valores %Rigideces del absorber

for k=1:3;

    %IMPLEMENTAR ABSORSOR DE VIBRACIONES AL SISTEMA VIGA EN VOLADIZO
    K_modificado=K_valores
    M_modificado=M_valores
    K_modificado(4,4)=K_valores(4,4)+ka_valores(1,k) %Se añade en la matriz de rigidez la rigidez del absorber
    K_modificado(4,5)=-ka_valores(1,k)
    K_modificado(5,4)=-ka_valores(1,k)
    K_modificado(5,5)=ka_valores(1,k)
    M_modificado(5,5)=ma_valores(1,k) %Se añade la masa del absorber

    %AMPLITUD DEL SISTEMA CON ABSORSOR
    Z_modificado=-w^2*M_modificado+K_modificado; %Impedancia mecanica del sistema con las matrices de masa y
    rigidez modificadas por los parametros del absorber
    X_CA=Z_modificado^(-1)*F %Amplitudes de cada masa con absorber en funcion de la frecuencia de excitacion

    for i=1:501;

        X_CA_valores3(2,i)=double(subs(X_CA(1),[w],[frecuencias(1,i)]));%Amplitudes de cada masa segun el
        valor de la frecuencia de excitacion
        X_CA_valores3(5,i)=double(subs(X_CA(5),[w ],[frecuencias(1,i)]));%Amplitudes de cada masa segun el
        valor de la frecuencia de excitacion
    end
    hold on
    subplot(1,2,1)
    plot(frecuencias/(2*pi),abs(X_CA_valores3(2,:))*1000);
    grid on
    xlabel('Frecuencia de excitación (Hz)');
    ylabel('Amplitud(mm)');
    title('Amplitud de la masa 4(Extremo de la viga)')
    xlim([50 60])
    ylim([0 0.8])

    hold on
    subplot(1,2,2)
    plot(frecuencias/(2*pi),abs(X_CA_valores3(5,:))*1000);
    grid on
    xlabel('Frecuencia de excitación (Hz)');
    ylabel('Amplitud(mm)');
    title('Amplitud del absorber')
    xlim([50 60])
    ylim([0 15])
end
```